

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

**Об эффективности применения элементов высшей математики при решении
практических задач по безопасности экологических систем**

- Р.Г. Манагадзе** Департамент технологий газа и нефти, Грузинский технический университет,
Грузия, 0175, Тбилиси, ул. М. Костава 75
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- В.В. Абзианидзе** Институт гидрогеологии и инженерной геологии, Грузинский технический уни-
верситет, Грузия, 0126, Тбилиси, село Дигоми, ул. св. равноапостольной Нины, 1
E-mail: verikoabz@mail.ru
- Д.В. Абзианидзе** Институт гидрогеологии и инженерной геологии, Грузинский технический уни-
верситет, Грузия, 0126, Тбилиси, село Дигоми, ул. Св. равноапостольной Нины, 1
E-mail: dimitri.abz@mail.ru

Рецензенты:

Т. Барабадзе, профессор горно-геологического факультета ГТУ
E-mail: tbarabadze@mail.ru

Д. Блушвили, ассоциированный профессор горно-геологического факультета ГТУ
E-mail: datoblu@yahoo.com

Аннотация. В статье, предлагаемой вниманию читателей, почти нет формул, не доказываются теоремы, но она призвана дать представление о том, как в наши дни можно применять математические методы при решении практических задач по безопасности экологических систем (ЭС).

Эта статья – размышления математиков о своей специальности, размышления людей, которые проделали путь от „чистой математики” к „математической экологии”. Этот путь определил тот факт, что математика становится естественным инструментом в экологических исследованиях, и экологи-

математический анализ превратился в важное направление научных исследований.

Математику принято относить к естественным наукам, т. е. к наукам, изучающим содержание тех процессов, которые происходят в окружающем нас мире. Такая точка зрения вполне оправдана, поскольку математика возникла из-за повседневных практических нужд человека на самых ранних ступенях развития человеческого общества для того, чтобы помочь человеку в его борьбе за существование.

Математика всегда черпала информацию для анализа в этих процессах и создавала новые методы, позволяющие исследовать эти процессы.

Применение математических методов в экологии дает возможность получить такие результаты, которые невозможно достичь другими методами. Желательно, чтобы экологи умели бы не только пользоваться математическим аппаратом, но и могли бы выбрать из многочисленных методов именно тот, который необходим для достижения поставленной цели, т.е. целенаправленно его использовать.

Ключевые слова: окружающая среда; математика; экологическая безопасность; экологическая система.

Введение

Содержание этой работы рассчитано на тех, кто знаком с основными элементами высшей математики. Они могут воспользоваться результатами этой статьи для экологических исследований с целью достижения экологической безопасности (ЭБ) [1,2].

Экономические кризисы конца XX и начала XXI веков перестали носить локальный характер и стали охватывать целые регионы. К природным стихиям стали „присоединяться” антропогенные катастрофы, по масштабам и последствиям значительно опаснее природных. Процесс антропогенеза в масштабах планеты стал неуправляемым и опаснее по своим последствиям. Совокупность всех этих воздействий на окружающую среду (ОС) ведет к формированию новой экологической ситуации, требующей анализа реальных проблем, исходя из того, что, с одной стороны, человечеством осознается угроза, которую несут катастрофы, а, с другой стороны, развитие наук достигло необходимого уровня для анализа этой ситуации [3].

Следуя работе [4], важным фактором искоренения отмеченных проблем является разработка, адап-

тация и внедрение в практику программно-технических и информационных средств для оценки и прогнозирования экологической обстановки и согласованное управление с промышленными и сельскохозяйственными производствами, экономикой, здравоохранением и другими видами деятельности того или иного региона. Отсюда следует, что в сфере ЭБ к одной из важнейших ролей отводится проблема поиска оптимального управления ЭС. Одна из главных трудностей, возникающих при этом, состоит в том, что необходимо комплексно использовать результаты прикладной математики с учетом специфики исследуемого процесса современной теории управления и математического программирования.

Для того чтобы применить математические методы в экологии, одной из первоочередных задач является исследование ЭС и получение, по возможности, её полного математического описания, т.е., необходимо располагать некоторой её моделью, представляющей закон функционирования данного процесса, а затем создать соответствующий аппарат, который позволит провести анализ изучаемого процесса, оценить наши возможности и только на основе такого анализа сформировать цель [5].

Именно модель является ключом к успеху, она должна оказывать поддержку человеку в его активной деятельности при взаимодействии с природой для улучшения условий жизни. Модель должна не только достаточно четко отражать природные явления, но и должна быть удобной для применения.

Общий порядок построения математической модели заключается в формулировании задачи, изучении процесса, составлении содержательного и формализованного описания. Математическая модель, являясь отображением ЭС, используется для исследований, управления и прогнозирования. При

построении модели важным является выбор основных параметров, характеризующих данный процесс. В большинстве случаев при решении прикладных задач достаточно учитывать лишь основные стороны процесса. При синтезе математической модели ЭС изучаются теоретические основы, а затем составляется уравнение модели [6].

Основная часть

Основные понятия формализации ЭС сводятся к следующему [1]: на основе изучения процесса функционирования ЭС производится её описание как объекта управления. Полученное описание используется для формализации таких понятий, как $x(t)$ – выходные (управляемые) величины (параметры), $u(t)$ – управляющие (выбираемые нами) воздействия на процесс, $\theta(t)$ – возмущающие (не зависящие от нас) воздействия на процесс. Управляющие и возмущающие воздействия относят ко входным величинам параметров. Это позволяет далее говорить об объекте управления, блок-схема которого показана на рис. 1.

Далее уточняется оценка качества функционирования ЭС или критерий качества I , который обычно представляет собой числовой функционал, значение которого в интервале $[t_0, t_1]=T$ функционирования системы (объекта управления) определяется функциями $u(t)$ и $x(t)$ ($t_0 < t < t_1$) и множеством допустимых значений U_t и X_t , т. е.

$$I \in \{U_t \times X_t \rightarrow R\}.$$

Наконец, ставится вопрос математической зависимости выхода от входов как об операторе $\Phi \in \{U_t \times \theta_t \rightarrow X_t\}$, который чаще всего является некоторым дифференциальным оператором. Иногда оператор Φ называют математической моделью объекта управления. Однако лучше математической моделью задачи управления (или объекта управления) называть $M = \{U_t, \theta_t, T, X_t, \Phi\}$.

Это хорошо согласуется с интуитивными представлениями. Например, такая модель объекта управления учитывает сразу и ограничения, и особенности множества времени и т.д.



Рис. 1. Оценка качества управления

Проблемы моделирования ЭС обсуждаются и решаются в монографии [4], а также в [3].

Целью управления ЭС является достижение ЭБ путем сведения к минимуму суммарных отрицательных воздействий на неё, т.е. обеспечение должного качества ОС. Поэтому эту величину будем рассматривать как управляемую величину ($x(t)$). Учитывая экономический кризис, управление осуществляется инвестициями [4,7].

Желаемое значение выходной переменной обозначим через $x^*(t)$, т.е. это значение управляемой переменной, которое способствует эффективному функционированию ЭС.

Для того, чтобы обеспечить ЭБ, необходимо, чтобы $x(t) = x^*(t)$ для любого момента времени $1 \leq t \leq T$ (где T – время функционирования ЭС).

Ввиду того что математическое описание содержит априорную неопределенность, заключающуюся в неполноте информации о поведении возмущающих воздействий, то задачи, решаемые в

экологии, можно отнести к числу задач, содержащих неопределенные факторы, неопределенность наших знаний об окружающей обстановке (неопределенность природы).

Под возмущающими воздействиями подразумеваются любые потоки вещества, энергии и информации, непосредственно образующиеся в ОС или планируемые в результате антропогенной деятельности [5].

Модели, в которых приходится учитывать случайные факторы θ , называются вероятностными или стохастическими. В таких моделях выходная переменная $x(t)$ является случайной переменной, поэтому цель управления - формировать в детерминированной форме нельзя. Условие $x(t) = x^*(t)$ нужно заменить каким-либо требованием, сформулированным в вероятностных терминах. Например, [4]: $I_1 = M\{[x(t) - x^*(t)]^2\} \rightarrow \min$ или $I_2 = P\{|x(t) - x^*(t)| < \epsilon\}$.

Первое условие минимизирует дисперсию, а второе максимизирует вероятность того, что управляемая величина находится внутри некоторого достаточного малого интервала с центром в x^* . Оба эти условия тем или иным образом оценивают точность достижения цели.

Как мы видим, во многих практических случаях управляющее лицо имеет доступ лишь к неполной (частичной) информации, что создает серьезные препятствия для экологических исследований.

В данном случае задача управления ЭС сводится к задаче управления случайными процессами. Она решается в два этапа. Вначале оцениваются возмущающие воздействия, а затем решается задача управления, т.к. вначале следует определить состояние системы, прежде чем рассматривать управляющее воздействие, изменяющее это состояние.

Задача оценки и управления рассматривается как вероятностная. Для ее решения используются спе-

циальные статистические методы, вводя в рассмотрение определенные качественные оценки случайных воздействий.

Например, в [7] предлагается метод для оценки случайных воздействий, который, основываясь на Бейсиковом подходе, позволяет оценить эти величины по динамическим характеристикам: математическим ожиданием и дисперсией. Полученные рекуррентные алгоритмы позволяют преодолеть отсутствие необходимых данных. В работе показано, что даже при весьма ограниченной информации указанный подход существенно улучшает точность оценки.

Авторы [8] предлагают использовать оптимального наблюдателя, который известен в литературе как фильтр Кальмана-Бьюси, что позволило получить алгоритмы фильтрации как для оценки состояния ЭС, так и для случайных величин.

В [6] значительное внимание уделено рассмотрению прикладных вопросов, возникающих при конкретной реализации алгоритмов фильтрации. В частности, получены рекуррентные соотношения, связывающие настоящие и прошлые оценки в форме системы разностных уравнений. В дальнейшем эти оценки использованы для прогнозирования.

Теперь перейдем к задаче управления. Ее основное назначение – дать ответ на следующий вопрос: каким образом в каждый момент времени выбрать управление или, иными словами, принять решение, зависящее от накопленной информации, чтобы некоторый функционал стал минимумом. Для иллюстрации рассмотрим конкретный пример. Для наглядности используем результаты, полученные в [4,7].

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: имеется функционирующая в дискретные моменты $t_n = n$ ЭС, которая описывается линейной статической моделью относительно воз-

мушающих воздействий. Для наглядности допустим, что модель зависит от одного возмущения. Состояние ЭС характеризуется с помощью выходной переменной $x(N)$, которая определяет степень загрязнения ОС. Наблюдения за этой переменной с помощью наблюдаемой переменной $y(N)$, т.е., с помощью этой переменной система будет воздействовать на окружающую обстановку. Возмущающее воздействие оценивается по динамическим характеристикам: математическому ожиданию $m(N)$ и дисперсии $D(N)$. Далее эти оценки вводятся в алгоритм управления с целью компенсации возмущений, чтобы заставить управляемую систему действовать определенным образом. При решении задач управления мы должны минимизировать среднее квадратическое отклонение регулируемого параметра $x(N)$ от желаемого $x^*(N)$, т.е., задача сводится к минимизации условного математического ожидания $[x(N)-x^*(N)]^2$ при условии, что $m(N)$ и $x(N)$ известны. Решение оптимальной задачи управления имеет вид:

$$u_N = \frac{x^*(N)}{a_N + b_N m(N)}, \quad (1)$$

где a_N, b_N – константы.

На рис. 2 показана структурная схема замкнутой системы, образующаяся при реализации алгоритма, полученного при решении задачи управления. Здесь ОУ – объект управления ЭС, на который действуют возмущения θ . НУ – наблюдаемое устройство, $y(N)$ – выходная переменная НУ, И – идентификатор, определяющий динамические характеристики $m(N)$,

$D(N)$, полученные по наблюдению $y(N)$, УУ- управляющее устройство, вырабатывающее воздействие u_N согласно алгоритму (1).

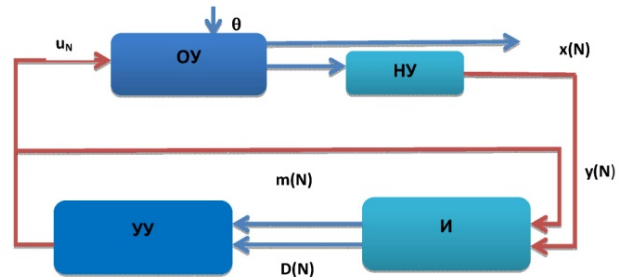


Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы

Наличие возмущений привело к необходимости построения адаптивной системы управления. Полученный алгоритм управления обеспечит эффективность функционирования ЭС. Такая компоновка материала позволяет отчетливо увидеть место математиков при решении практических вопросов, связанных с эффективностью функционирования ЭС.

Заключение

В предлагаемой работе изложены методы алгоритмизации ЭС. Алгоритмизация – это составление математического описания ЭС. Исходной информацией для нее служат теоретические и экспериментальные данные, а также эвристические неформальные сведения об изучаемом экологическом процессе. Данная работа может быть полезна и для студентов, занимающихся экологией.

Литература

1. Abzianidze D., Tabatadze G., Managadze R., Abzianidze V., Inanashvili N. Thinking of mathematicians about the ecology and its problems. Social economics. XXI century's actual problems. 2015, 273—275 pp. (in Russian).
2. Poporadze N., Abzianidze D., Dvali M., Meskhishvili T. Significance of mathematical ecology in the protection of ecological systems safety. Tbilisi. 2010, 242—244 pp. (in English).
3. Poporadze N., Abzianidze D., Dvali M., Meskhishvili T. Efficiency of ecological monitorings in case of the pollution of river Mtkvari by heavy metals. Works of GTU. #3 (477). 2010, 17—21 pp. (in Georgian).
4. Poporadze N., Abzianidze D., Dvali M. About the problems of ecological security and optimization of management of ecological system. Works of GTU. #2 (476). 2010, 59-63 pp. (in Russian).
5. Poporadze N., Abzianidze D., Dvali M., Meskhishvili T. Application of mathematical methods in medical ecology. Works of GTU. # 1(483), 2012, 54-58 (in Russian).
6. Abzianidze D., Tabatadze G., Khudadze N. On the use of mathematical modeling in environmental protection. Journal "Business—Engineering". #2. 2013, 195—197 pp. (in Georgian).
7. Abzianidze D., Managadze R., Poporadze N., Tabatadze G. The use of mathematical ecology methods for solving problems in environmental protection. 2015. (in Georgian).
8. Abzianidze D., Managadze R. Application of Kalman-Bucy model in processing of observation results of river water conditions. Georgian oil and gas. #29. 2014, 17—20 pp. (in Russian).
9. Abzianidze D., Managadze R., Abzianidze V. Application of Kalman filtering during the estimation of river water state through discrete observations. Georgian oil and gas. #30. 2015, 108—111 pp. (in Russian).
10. Abzianidze D., Managadze R., Abzianidze V. Application of dynamic programming model for solving practical problems of ecological systems security. Georgian oil and gas. #31. 2016, 79—82 pp. (in Russian).

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

ეკოლოგიური სისტემის უსაფრთხოების პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების გამოყენების ეფექტურობის შესახებ

- რ. მანაგაძე** ნავთობისა და გაზის ტექნოლოგიების დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0175, თბილისი, მ. კოსტავას 75
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- ვ. აბზიანიძე** ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0126, თბილისი, სოფ. დილომი, მოციქულთა სწორი წმინდა ნინოს ქ. №1
E-mail: verikoabz@mail.ru
- დ. აბზიანიძე** ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0126, თბილისი, სოფ. დილომი, მოციქულთა სწორი წმინდა ნინოს ქ. №1
E-mail: dimitri.abz@mail.ru

რეცენზენტები:

თ. ბარაბაძე, სტუ-ის სამთო-გეოლოგიური ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: tbarabadze@mail.ru

დ. ბლუაშვილი, სტუ-ის სამთო-გეოლოგიური ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი
E-mail: datoblu@yahoo.com

ანოტაცია. ნაშრომი თითქმის არ შეიცავს ფორმულებს, მასში არც თეორემების დამტკიცებას შეხვდებით, ის მოწოდებულია იმისათვის, რომ მკითხველს წარმოდგენა შეექმნას თუ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ მათემატიკური მეთოდები ეკოლოგიური სისტემის უსაფრთხოების პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას.

ნაშრომი მათემატიკოსების მსჯელობაა თავის სპეციალობაზე, იმ ადამიანების მსჯელობა, რომლებმაც განვლეს გზა „წმინდა მათემატიკიდან“ „მათემატიკურ ეკოლოგიამდე“. ეს გზა განსაზღვრა იმ ფაქტმა, რომ მათემატიკა ჩამოყალიბდა როგორც ეკოლოგიური კვლევების ბუნებრივი ინსტრუმენტი და, შესაბამისად, ეკოლოგიურ-მათემატიკური ანალიზი გადაიქცა მეცნიერული კვლევების მნიშვნელოვან მიმართულებად.

მათემატიკა შეიძლება მივაკუთნოთ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას ანუ მეცნიერებას რომელიც შეისწავლის იმ პროცესების შინაარსს, რომლებიც არსებობს ჩვენ ირგვლივ. ასეთი თვალსაზრისი გამართლებულია იმით, რომ მათემატიკა წარმოიშვა ადამიანის ყოველდღიური პრაქტიკული საქმიანობის შედეგად, რათა დაეხმაროს მას საზოგადოების განვითარების ყველა საფეხურზე არსებობისთვის ბრძოლაში.

ანალიზის ჩამოყალიბებისათვის მათემატიკა ყოველთვის იძიებდა ინფორმაციას ამ პროცესებში და ქმნიდა ახალ მეთოდებს ამ პროცესების გამოსაკვლევად.

ეკოლოგიაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენების საშუალებით შეიძლება მივიღოთ ისეთი შედეგები, რომლის მიღწევა შეუძლებელია სხვა მეთოდებით. სასურველია, რომ ეკოლოგებმა შეძლონ არა მარტო გამოიყენონ მათემატიკური აპარატი, არამედ სხვადასხვა მეთოდს შორის შეარჩიონ ის, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია დასახული მიზნების მიღწევა, ე.ი. გამოიყენონ მიზანმიმართულად.

საკვანძო სიტყვები: გარემო; ეკოლოგიური სისტემა; ეკოლოგიური უსაფრთხოება; მათემატიკა.

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

On efficiency of application of elements of higher mathematics for the solution of practical tasks of ecological systems safety

- R. Managadze** Department of Oil and Gas Technology, Georgian Technical University, 75 M.
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- V. Abzianidze** Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, 1 Tsminda Nino str, Digomi Village, 0126 Tbilisi, Georgia
E-mail: verikoabz@mail.ru
- D. Abzianidze** Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, 1 Tsminda Nino str, Digomi Village, 0126 Tbilisi, Georgia
E-mail: dimitri.abz@mail.ru

Reviewers:

- T. Barabadze**, Professor, Faculty of Mining and Geology, GTU
E-mail: tbarabadze@mail.ru
- D. Bluashvili**, Associate Professor, Faculty of Mining and Geology, GTU
E-mail: datoblu@yahoo.com

Abstract. There are almost no formulas in the article offered to the attention of readers, no theorems are being proved, but it is intended to give an idea of how in our days mathematical methods can be applied to solve practical problems on the safety of ecological systems.

This article is a reflection of mathematicians about their specialty, reflections of people who have traveled from "pure mathematics" to "mathematical ecology". This path was determined by the fact that mathematics becomes a natural tool in environmental studies and environmental mathematical analysis has turned into an important area

of scientific research. Mathematics is usually referred to the natural sciences, that is, to the sciences that study the content of those processes that take place in the world around us. This point of view is fully justified, because mathematics has arisen of the daily practical needs of a man at the earliest stages of the development of human society in order to help him in his struggle for existence. Mathematics has always scooped up information for analysis in these processes and created new methods to study these processes. The application of mathematical methods in ecology makes it possible to obtain results that cannot be achieved by other methods. It is desirable that ecologists know not only use a mathematical apparatus, but also to be able to choose from many methods exactly the one that is necessary to achieve the set goal, i.e. purposefully use it.

Key words: Ecological safety; ecological system; environment; mathematics.

Дата рассмотрения 28.06.2018

Дата поступления 01.10.2018

Подписано к печати 28.12.2018